

TÜBİTAK Matematik Olimpiyatları  
Yaz Hazırlık Kampı  
Büyük Sınıf Kamp Sonu Sınavı, Afyon 2007

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

(i)  $f(0) = 1/2$

(ii)  $\exists a \in \mathbb{R} : \forall x, y \in \mathbb{R}$  için

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(a-y) + f(y) \cdot f(a-x)$$

$f$  fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz.

2.  $p$  asal sayı,  $n$  pozitif tamsayı olmak üzere,  $q|(n+1)^p - n^p$  ise  $p|q-1$  olduğunu gösteriniz.

3. Bir  $ABCD$  dikdörtgeninin çevrel çemberi üzerinde  $M$  noktası alınıyor.  $M$  noktasından  $AB, BC, CD$  ve  $DA$  kenarlarına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla  $R, P, T, Q$  olsun.  $PR \perp QT$  olduğunu ve bu doğruların kesişim noktasının  $ABCD$ 'nin bir köşegeni üzerinde olduğunu gösteriniz.

4.  $x, y, z > 0$  ise

$$\frac{(x+1)(y+1)^2}{3\sqrt[3]{z^2x^2}+1} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2y^2}+1} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{3\sqrt[3]{y^2z^2}+1} \geq x+y+z+3$$

olduğunu gösteriniz.

5.  $n$  köşeli bir çizgeye herhangi yeni bir kenar eklendiğinde;

a) yeni bir üçgen oluşuyorsa bu çizgede en az kaç kenar olabilir?

b) yeni bir  $K_4$  oluşuyorsa bu çizgede en az kaç kenar olabilir? ( $K_4$ , 4 köşeli tam çizgedir.)

*Sınav süresi  $3\frac{1}{2}$  saattir.  
Başarılar dileriz.*