

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün

30 Kasım 2008

4. \mathbb{N} negatif olmayan tam sayıların ve \mathbb{Z} de tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu,

i. $f(0, 0) = 1, f(0, 1) = 1,$

ii. her $k \notin \{0, 1\}$ için, $f(0, k) = 0$ ve

iii. her $n \geq 1$ ve k için, $f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 1, k - 2n)$

koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008, k)$ toplamının değerini bulunuz.

5. Düzlemde bir Γ çemberi ve onu kesmeyen bir ℓ doğrusu verilmiş olsun. $PQ \cap RS = \{A\}$ ve $PS \cap QR = \{B\}$ olacak biçimde, Γ çemberi üstünde P, Q, R, S noktalarının bulunmasını sağlayan ve ℓ doğrusu üstünde yer alan tüm $\{A, B\}$ nokta ikilileri için, $[AB]$ yi çap alan çemberlerin kesişim kümesini belirleyiniz.

6. 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t = 0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t = 1$ anında da, ağ yöneticisi, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t = 2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t = 2k + 1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

[$m \geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2 \leq i \leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ kümesine bir döngü diyoruz.]

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.