4.

1. Çözüm:

İddia 1: $k < 0$ veya $k > n^2+n+1$ ise $f(n,k) = 0$ dır.

İspat: n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 0$ için iddia doğrudur.
İddia $n-1$ için doğru olsun, yani $k < 0$ ya da $k > n^2-n+1$ ise $f(n-1,k) = 0$. Şimdi n ye bakalım. $k < 0$ ise $k-2n < 0$ olacağından, $f(n,k) = f(n-1,k)+f(n-1,k-2n) = 0+0 = 0$ dır. $k > n^2+n+1$ ise $k-2n > n^2-n+1$ olacağından $f(n,k) = f(n-1,k)+f(n-1,k-2n) = 0+0 = 0$ olur.

İddia 2: Her k tamsayısıiçin $f(n,k) = f(n, n^2+n+1-k)$.

İspat: Yine n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 0$ için iddia doğrudur.
İddia $n-1$ iddia doğru olsun, yani $0 \le k \le n^2-n+1$ ise $f(n-1,k) = f(n-1, n^2-n+1-k)$ (1). Burada k yerine $k-2n$ yazarsak, $f(n-1,k-2n) = f(n-1, n^2-n+1-(k-2n)) = f(n-1, n^2+n+1-k)$ (2). (1) ve (2) yi taraf tarafa toplayalım.
$f(n-1,k)+f(n-1,k-2n) = f(n-1,n^2-n+1-k)+f(n-1,n^2+n+1-k) = f(n-1,n^2+n+1-(k-2n))+f(n-1,n^2+n+1-k)$ ise $f(n,k) = f(n,n^2+n-1-k)$.

İddia 3: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n,k) = 2^{n+1}$

İspat: Yine tümevarım yapalım. $n = 0$ için iddia doğrudur.
İddia $n-1$ için doğru olsun, yani $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2-n+1} f(n-1,k) = 2^n$.
n için bakalım.

$$\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n,k) = \sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k)+f(n-1,k-2n) = \sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k)+\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k-2n) = \sum_{k=0}^{n^2-n+1} f(n-1,k)+\sum_{l=-2n}^{n^2-n+1} f(n-1,l) = 2^n+\sum_{l=0}^{n^2-n+1} f(n-1,l) = 2^n+2^n = 2^{n+1}$$

(Burada iddia 1 birkaçkez kullanılıyor).

$k = 0$'dan $k = n^2+n+1$'e kadar değisiyor yani n^2+n+2 terim var ve iddia 2'ye göre $f(n,k) = f(n,n^2+n+1-k)$. O zaman ilk $\frac{n^2+n+2}{2}$ terimin toplamı $\frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$ olur. Toplam şeklinde ifade edelim: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n^2+n}{2}} f(n,k) = 2^n$. Burada $n = 2008$ koyarsak istenilen sonucu elde ederiz.

2. Çözüm:
$A = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots 2n\}$ olsun.
İddia: $f(n,k)$ sayısı A kümesinin alt kümeleri arasında toplamları k olan altkümelerin sayısına eşittir.
İspat: İddia 0 için doğrudur. İddia $n-1$ için doğru olsun. n için bakalım.
Toplamı k olan kümelerden bazılarında $2n$ vardır, bazılarında yoktur. İçinde $2n$ varsa, bu kümelerin sayısı $f(n-1,k-2n)$ ye eşittir, çünkü $2n$ yi çıkardığımızda kalan sayıların toplamı $k-2n$ olur. İçinda $2n$ yoksa, bu kümelerin sayısı $f(n-1,k)$ ye eşittir. Dolayısıyla $f(n,k) = f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$ olur.

A kümesindeki tüm elemanların toplamı n^2+n+1 dir. Bu yüzden toplamı k olan alt kümelerin sayısı ile toplamı $n^2+n+1-k$ olan alt kümelerin sayısı birbirine eşittir. (Toplamı k olan kümenin tümleyenindeki elemanların toplamı $n^2+n+1-k$ dır ve bu, bir eşleme belirtir.)

Soruda bize toplamları $0, 1, \dots \frac{n^2+n}{2}$ olan elemanların sayısını soruyor. Yukarıdaki sonucu da göz önüne alırsak bu sayı tüm alt kümelerin sayısının yarısına eşittir. $|A| = n+1$ olduğundan cevap 2^n dir. $n = 2008$ için 2^{2008} bulunur.