Hazırlayan
Mehmet Kaysi
Semih Yavuz
Ömer Faruk Tekin

3.
$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}+\frac{a^2c^2}{b^3(c^2-ac+a^2)}=S \text{ olsun.}$$

$S \geq \dfrac{3}{ab+ac+bc}$ olduğunu göstereceğiz. $a+b+c=1$

$(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)\geq 3abc(a+b+c)=3abc$

İfadeyi düzenlersek $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq \dfrac{3}{ab+ac+bc}$ buluruz.

$S\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ olduğunu gösterelim.

$$\underbrace{S\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2c}+\frac{b^2-bc+c^2}{ab^2c^2}+\frac{a^2-ac+c^2}{a^2bc^2}\right)}_{=\text{A olsun}}\geq\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\right)^2 \text{ (Cauchy-Schwarz)}$$

$\Rightarrow S\geq \dfrac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}{A} \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)^2\geq A\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ olduğunu gösterirsek çözümü tamamlamış oluruz.

Her iki tarafı hesaplayalim.

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{2}{a^2c^2}+\frac{2}{b^2c^2}\overset{?}{\geq}\left(\frac{1}{b^2c}-\frac{1}{abc}+\frac{1}{a^2c}+\frac{1}{ac^2}-\frac{1}{abc}+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{bc^2}-\frac{1}{abc}+\frac{1}{a^2c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Sadeleştirip, düzenleyelim.

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{3}{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\overset{?}{\geq}2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{abc}+\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{ac}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{bc}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\overset{?}{\geq}\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)+\frac{1}{ac}\left(\frac{1}{a^2+c^2}\right)+\frac{1}{bc}\left(\frac{1}{b^2+c^2}\right)$$

$r\in\mathbb{R}$ için $\sum x^r(x-y)(x-z)\geq 0$ (Shur eşitsizliği). Yukarıdaki eşitsizlik Shur eşitsizliğinde $r=2$ durumuna denk geldiği için ispat tamamlanmış olur.