Hazırlayan
Mehmet Kaysi
Serhat Doğan

2a. **(i)** $p \leq 3$ ise
$p = 2$ için ifadenin tamkare olmadığı görülür. $p = 3$ ifade 16 ya eşit olur, $p = 3$ ifadeyi tamkare yapar.

(ii) $p > 3$ ise
$p = 6k - 1$, $p = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ olabilir. İfadeyi düzenleyelip çarpanlara ayıralım.

$$\left(7^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(7^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = pa^2$$

$A = 7^{\frac{p-1}{2}} - 1, B = 7^{\frac{p-1}{2}} + 1$ olsun.

A ve B sayılarının EBOB'u $B - A = 2$'yi böleceği için ve iki sayı da çift olduğundan $(A, B) = 2$ olur.

O zaman $b, c \in \mathbb{N}$ ve $(b, c) = 1$ olmak üzere $A = 2c^2, B = 2pb^2$ ya da $A = 2pb^2, B = 2c^2$ olmak zorundadr.

1. Durum $A = 2c^2, B = 2pb^2$ ise
$A = 7^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 2c^2$ ise $-1 \equiv 2c^2 (\text{mod} 7)$ ki bunun da çözümü yoktur.

2. Durum $A = 2pb^2, B = 2c^2$ ise
$6 | pa^2$ ve $(p, 6) = 1$ olduğundan $36 | pa^2$ olur.
$pa^2 = (7 - 1)\left(7^{p-1} + 7^{p-2} + \ldots + 7 + 1\right)$ 36 ile bölünüyorsa sağ taraf 6 ile bölünmelidir. Sağ taraf mod 6'da $p - 1$ e denk olduğundan $6 | p - 1$ bulunur, yani $p = 6k + 1$ olmalıdır.
$B = 2c^2$ ve $p = 6k + 1$ ise $7^{3k} + 1 = 2c^2$ dir. Çarpanlara ayıralım:
$\left(7^k + 1\right)\left(7^{2k} - 7^k + 1\right) = 2c^2$.
$\left(7^{2k} - 7^k + 1\right) - \left(7^k + 1\right)\left(7^k - 2\right) = 3$ olduğundan bu iki sayının EBOB'u 1 veya 3 olabilir. Her iki sayı da 3 ile bölünmediğinden bu iki sayının EBOB'u 1 olur.
m, n tamsayılar olmak üzere, $7^k + 1 = 2n^2$, $7^{2k} - 7^k + 1 = m^2$ olmak zorundadır. Fakat $7^{2k} - 7^k + 1$ sayısı $\left(7^k - 1\right)^2$ ile $(7^k)^2$ arasında olduğu için tamkare olamaz. Bu durumdan hiç çözüm gelmez.

Tek çözüm $p = 3$ tür.

2b.
(i) $p \leq 3$ ise
$p = 2, 3$ için ifadenin tamkare olmadığı görülür.

(ii) $p > 3$
Bir önceki sorudaki adımları 7 yerine 11 için tekrarlayalım.

1. Durum $A = 2pb^2, B = 2c^2$ ise
$B = 11^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 2c^2$, yani $11^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 2c^2 (\text{mod} 11)$ ifadesinin çözümü olmadığı için buradan çözüm gelmez.

2. Durum $A = 2c^2, B = 2pb^2$ ise
$p = 4k + 1$ ise $A = \left(11^k - 1\right)\left(11^k + 1\right) = 2c^2$ $\left(11^k + 1\right) - \left(11^k - 1\right) = 2$ ve sayılar çift olduğundan $\left(11^k - 1, 11^k + 1\right) = 2$ olur. O zaman, $11^k - 1 = 2m^2$ ve $11^k + 1 = 4n^2$ olacak şekilde m, n tamsayıları vardır. Fakat burada 2. denklemin çözümü yoktur. $(11^k = (2n)^2 - 1)$

$p = 4k + 3$ ise, $3|11^{4k+2} - 1 = pa^2$ ve $(p, 3) = 1$ olduğundan $9|11^{4k+2} - 1$ olur. Bu durumda $6|4k+2 = p-1$ olur, $p \equiv 3(\text{mod}4)$ ve $p \equiv 1(\text{mod}6)$ ise $p \equiv 7(\text{mod}12)$ olur. $p = 12l+7$ olsun.. O zaman $A = 11^{6l+3} - 1 = 2c^2$ olur. Çarpanlarına ayıralım, $\left(11^{2l+1} - 1\right)\left(11^{4l+2} + 11^{2l+1} + 1\right) = pa^2$. $2l+1 = t$ (t tek tamsayı) diyelim. $\left(11^{2t} + 11^t + 1\right) - (11^t - 1)(11^t + 2) = 3$ olduğundan bu iki sayının EBOB'u 1 veya 3 olabilir. Fakat iki sayı da 3 ile bölňmez, dolayısıyla EBOB 1 dir. EBOB=1 ve $11^{2t} + 11^t + 1$ tek olduğundan $11^{2t} + 11^t + 1$ tamkare olmak zorundadır. Fakat $\left(11^t\right)^2 < 11^{2t} + 11^t + 1 < \left(11^t + 1\right)^2$ olduğundan çözüm gelmez.

Bu şartı sağlayan p asalı yoktur.